11. Tutorium – Theoretische Mechanik

1. Zyklische Koordinaten:

Ist für ein dynamisches System die Lagrange Funktion $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ unabhängig von einer verallgemeinerten Koordinate q_k, so folgt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k}}_{=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = 0$$

Der zugehörige kanonische Impuls $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ ist eine Erhaltungsgröße.

⇒ Die korrespondierende Koordinate heißt zyklisch.

2. Das Noether-Theorem: Emmy Noether 1882 – 1935

Sei in einem kartesischen KOS die Koordinate x zyklisch, dann bedeutet

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

dass sich die Lagrange-Funktion entlang der x-Achse nicht ändert. Ist die kinetische Energie T nur von $\dot{r}_i$ abhängig folgt:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = 0,$$

das heißt die Kraft verschwindet in x-Richtung. Für einen Massepunkt

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m \dot{r}_i^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

gilt für den kanonischen Impuls $p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$, sodass die Erhaltung des kanonischen Impulses der klassischen Impulserhaltung entspricht.

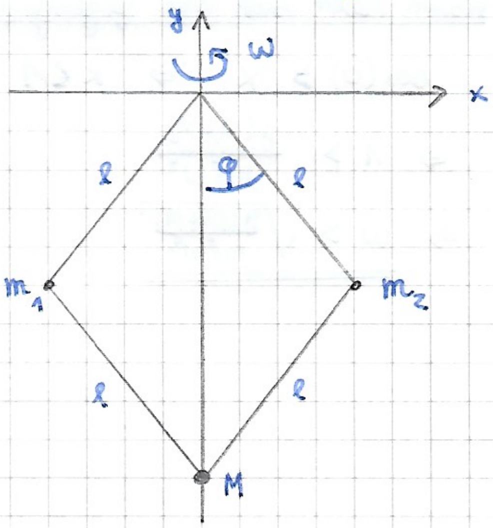
Das System ist also offensichtlich unter Verschiebungen in x-Richtung invariant und verändert die Bewegungsgleichung nicht.

Noether-Theorem:

Symmetrie: Eine Transformation der generalisierten Koordinaten (+ Zeit), die die Bewegungsgleichungen invariant lassen

$$\boxed{\text{Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie gehört eine Erhaltungsgröße.}}$$

3. Weil es so schön war – Lagrange II



Für $m_1 = m_2 = m$: $\quad x_1 = -x_2$
$\quad y_1 = +y_2$

$x_2 = x = l \sin\varphi$
$y_2 = y = -l \cos\varphi$

$$\dot{x} = l \cos\varphi \, \dot{\varphi}$$
$$\dot{y} = l \sin\varphi \, \dot{\varphi}$$

für M: $x = 0$ $\quad y = -2\cos\varphi\, l$ $\quad \dot{y} = 2\sin\varphi\, l\, \dot{\varphi}$

$\Rightarrow$ eine generalisierte Koordinate: φ

Potentielle Energie: $U = 2U_m + U_M$

$$U = 2mg\, y_m + Mg\, y_M = -2mg\, l\cos\varphi - 2Mg\, l\cos\varphi$$
$$= \underline{-2l\cos\varphi\, g\,(m+M)}$$

Kinetische Energie: $T = 2T_{m,kin} + 2T_{m,rot} + T_{M\,kin}$

$$T = 2\left(\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)\right) + 2\left(\frac{1}{2}J_A\cdot\omega^2\right) + \frac{1}{2}M\dot{y}^2$$
$$= m\,l^2\dot{\varphi}^2 + m\sin^2\varphi\, l^2\omega^2 + 2M\sin^2\varphi\, l^2\dot{\varphi}^2$$

NR.: $J_A \overset{\text{Steiner}}{=} m\cdot x^2 = m\sin^2\varphi\, l^2$

Lagrange-Funktion: $L = T - U$

$$L = m\,l^2\dot{\varphi}^2 + m\sin^2\varphi\, l^2\omega^2 + 2M\sin^2\varphi\, l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\cos\varphi\, g\,(m+M)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 2m\sin\varphi\cos\varphi\, l^2\omega^2 + 4M\sin\varphi\cos\varphi\, l^2\dot{\varphi}^2 - 2l\sin\varphi\, g\,(m+M)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2m\,l^2\dot{\varphi} + 4M\sin^2\varphi\, l^2\dot{\varphi}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 2m\,l^2\ddot{\varphi} + 8M\sin\varphi\cos\varphi\, l^2\dot{\varphi}^2 + 4M\sin^2\varphi\, l^2\ddot{\varphi}$$

$$\Rightarrow 2m\sin\varphi\cos\varphi\, l^2\omega^2 + 4M\sin\varphi\cos\varphi\, l^2\dot{\varphi}^2 - 2l\sin\varphi\, g\,(m+M) - 2m\,l^2\ddot{\varphi} - 8M\sin\varphi\cos\varphi\, l^2\dot{\varphi}^2 - 4M\sin^2\varphi\, l^2\ddot{\varphi} = 0 \quad \Big|\, :2l$$

$$\Rightarrow m\sin\varphi\cos\varphi\, l\omega^2 - 2M\sin\varphi\cos\varphi\, l\dot{\varphi}^2 - \sin\varphi\, g\,(m+M) - m\,l\ddot{\varphi} - 2M\sin^2\varphi\, l\ddot{\varphi} = 0$$

Gleichgewichtswinkel: $\dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$

$$\Rightarrow m\sin\varphi_0\cos\varphi_0\, l\omega^2 = \sin\varphi_0\, g\,(m+M) \quad \Big|\, :\sin\varphi$$
$$m\cos\varphi_0\, l\omega^2 = g\,(m+M)$$
$$\cos\varphi_0 = \frac{g(m+M)}{m\,l\omega^2}$$
$$\underline{\underline{\varphi_0 = \arccos\left(\frac{g(m+M)}{m\,l\omega^2}\right)}}$$

Wann hebt sich das Gegengewicht? Wenn $\varphi_0 \geq 0$

$\cos(0) > x \quad \Rightarrow \quad x < 1$

$$\Rightarrow 1 > \frac{g(m+M)}{m\,l\omega^2}$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{\omega > \sqrt{\frac{g(m+M)}{m\,l\omega^2}}}}$$